فصل دوم:

مبانی دینامیک سیستم گسسته

Chapter 2:

Fundemental of discrete dynamic system

۲-۱- سری فوریه هارمونیک

ابتدا تعریف یک تابع متناوب در نظر گرفته می‌شـــود. $f(t)$ تابع متناوب یا پریودیک با زمان تناوب یا پریود اصلی با مقدار T نامیده می‌شود هرگاه:

$$\mathrm{f(t) = f(t+T)} \qquad T = 2\pi/\omega \tag{۲-۱}$$

که در آن ω فرکانس زاویه‌ای اصـلی نامیده می‌گردد. در صـورتی‌که $f(t)$ تابع متناوب باشـد، سری فوریه آن به شکل زیر بسط داده می‌شود:

$$\mathrm{f(t) = a_0 + \sum_{l=1}^{\infty}(a_l \cos \omega_l t + \ b_l \sin \omega_l t)} \qquad \mathrm{l = 1,2,3, \ldots} \tag{۲-۲}$$

که در آن برای l-امین جمله هارمونیک، ω_{l} فرکانس زاویه‌ای و T_l پریود یا زمان تناوب نامیده می‌گردد:

$$\omega_{\mathrm{l}} = l\omega = 2\pi\, l/T = 2\pi/T_l\,; \qquad T_l = T/l \tag{۲-۳}$$

بدین ترتیب مشاهده می‌شود که برای l-امین جمله هارمونیک، مقدار فرکانس زاویه‌ای l برابر مقدار اصلی آن اســت و به همین ترتیب مقدار پریود $1/l$ برابر مقدار زمان تناوب اصــلی اســت. ضرایب $\mathrm{a_0}$، $\mathrm{a_l}$ و $\mathrm{b_l}$ دامنه

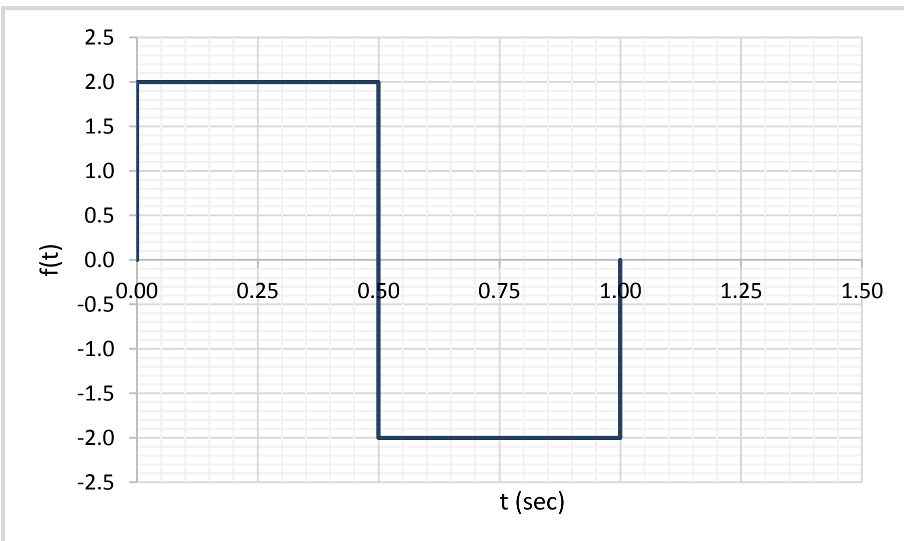
جملات هارمونیک را نشان می‌دهند و از روابط زیر قابل محاسبه هستند:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_l = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,cos\,\omega_l t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,cos\frac{2\pi l}{T}t\,dt \qquad (۲-٤)$$

$$b_l = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,sin\,\omega_l t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,sin\frac{2\pi l}{T}t\,dt$$

مسئله ۲-۱. یک تابع متناوب با پریود اصلی T به شکل زیر در نظر بگیرید. مطلوب است بسط سری فوریه تابع و مقایسه مقادیر تابع با بسط آن با در نظر گرفتن ۱، ۳ و ۵ جمله هارمونیک.



حل مسئله. با توجه به شکل تابع مشاهده می‌شود که پریود اصلی آن $T = 1\,sec$ می‌باشد. بنابراین:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 f(t)\,dt = 0$$ (سطح زیر نمودار تابع برابر با صفر است.)

$$a_l = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,cos\frac{2\pi l}{T}t\,dt = \frac{2}{1}\int_0^{0.5} 2\,cos\frac{2\pi l}{1}t\,dt + \frac{2}{1}\int_{0.50}^{1.0} -2\,cos\frac{2\pi l}{1}t\,dt$$

$$=\frac{4}{1}\times\left[\left(\frac{1}{2\pi l}\sin\ 2\pi lt\right)\Big|_{0}^{0.50}-\left(\frac{1}{2\pi l}\ \sin\ 2\pi lt\right)\Big|_{0.5}^{1}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi l}(\sin\ \pi l-\sin\ 0)-\frac{2}{\pi l}(\sin\ 2\pi l-\sin\ \pi l)$$

$$=\frac{2}{\pi l}(2\sin\ \pi l-\sin\ 0-\sin 2\pi l)=0$$

$$b_l=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi l}{T}t\,dt=\frac{2}{T}\int_0^{0.5}2\sin\frac{2\pi l}{T}t\,dt+\frac{2}{T}\int_{0.50}^{1.0}-2\sin\frac{2\pi l}{T}t\,dt$$

$$=\frac{4}{1}\times\left(-\frac{T}{2\pi l}\cos\ \frac{2\pi l}{T}t\right)\Big|_{0}^{0.50}-\frac{4}{1}\left(-\frac{T}{2\pi l}\cos\ \frac{2\pi l}{T}t\right)\Big|_{0.5}^{1}$$

$$=-\frac{2}{\pi l}(\cos\ \pi l-\cos\ 0)+\frac{2}{\pi l}(\cos\ 2\pi l-\cos\ \pi l)$$

$$=\frac{2}{\pi l}(1-\cos\ \pi l)+\frac{2}{\pi l}(\cos\ 2\pi l-\cos\ \pi l)=\frac{2}{\pi l}(1-2\cos\ \pi l+\cos\ 2\pi l)$$

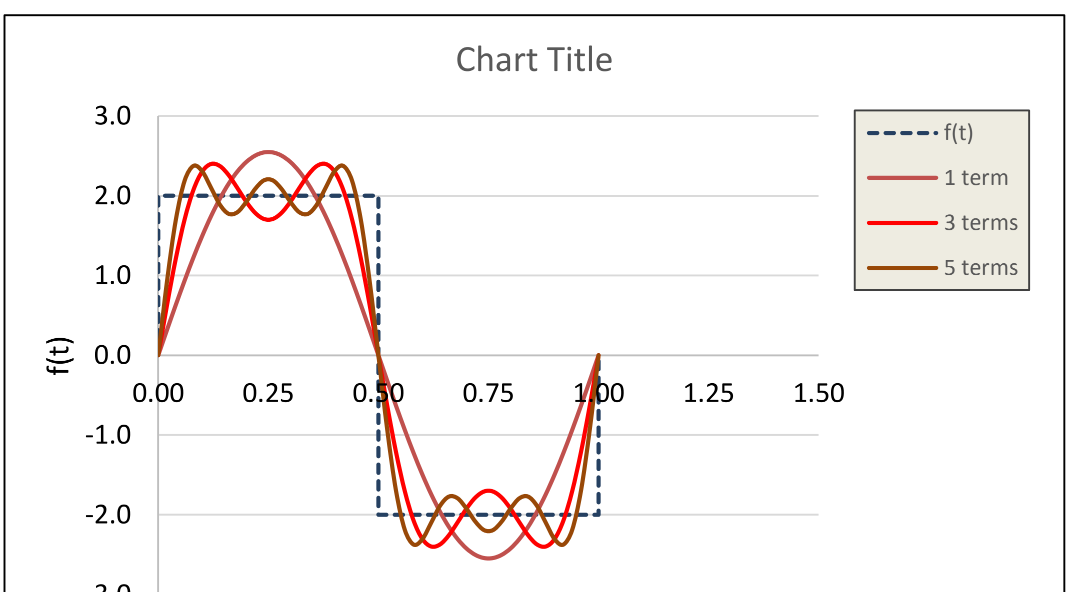
$$=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi l} & l=\ 1,3,5,\dots\\ 0 & l=\ 2,4,6,\dots\end{cases}$$

بنابراین بسط فوریه تابع $f(t)$ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{\mathrm{l}=1}^{\infty}(\mathrm{b_l}\sin\omega_\mathrm{l}\mathrm{t})=\sum_{\mathrm{l}=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi l}\ \sin 2\pi \mathrm{lt}\right)\qquad l=\ 1,3,5,\dots$$

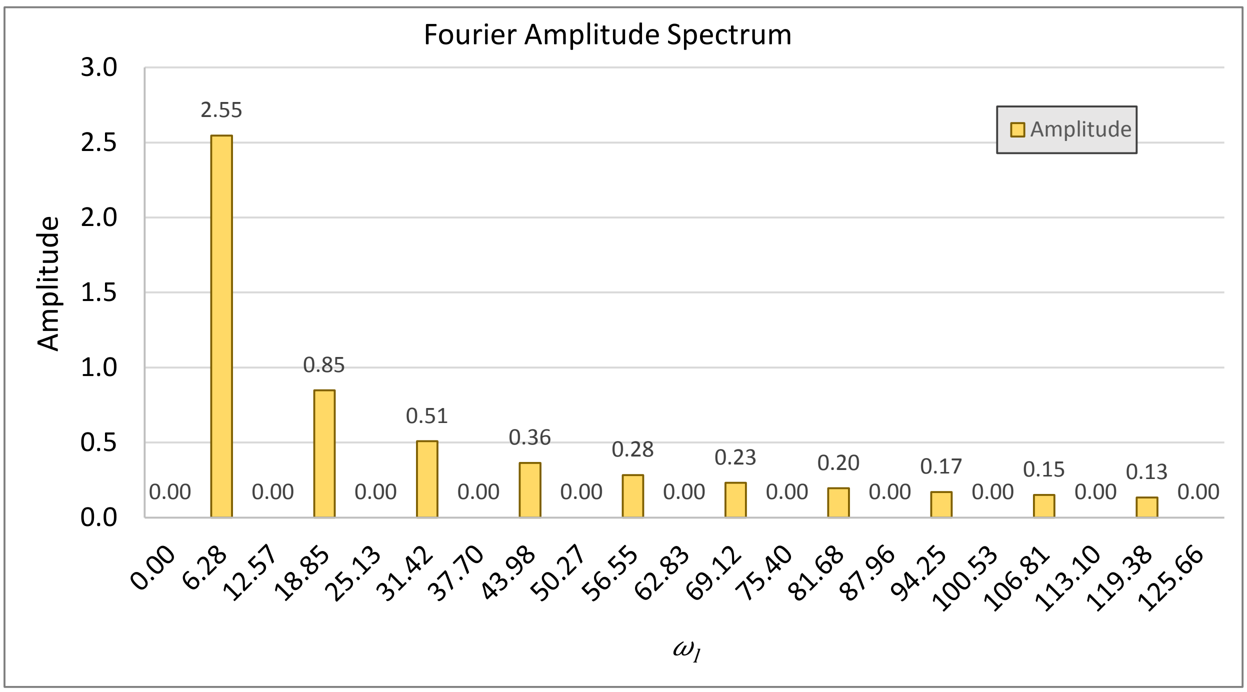
$$=\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1}\ \sin 2\pi\mathrm{t}+\frac{1}{3}\ \sin 6\pi\mathrm{t}\frac{1}{5}\ \sin 8\pi\mathrm{t}+\cdots\right)$$

نمایش تابع و بسط فوریه آن در شکل زیر آورده شده است.



بررسی دامنه جملات هارمونیک:

هر نمایش از یک کمیت در حوزه فرکانس طیف نامیده می‌گردد. مشاهده می‌شود که با افزایش فرکانس جملات هارمونیک دامنه آنها کاهش می‌یابد و بیشترین میزان مشارکت مربوط به اولین جمله هارمونیک است که بیشترین ضریب یا دامنه را دارد.



۲-۲- نمایشی دیگر از سری فوریه هارمونیک

ابتدا رابطه مثلثاتی زیر یادآوری می‌گردد:

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin\phi\cos\omega t + \cos\phi\sin\omega t \tag{۲-۵}$$

به همین ترتیب برای l-امین جمله هارمونیک در بسط فوریه نتیجه می‌شود که:

$$\sin(\omega_l t + \phi_l) = \sin\phi_l \cos\omega_l t + \cos\phi_l \sin\omega_l t \tag{۶-۲}$$

اکنون فرض می‌شود که $a_l = C_l \sin\phi_l$ و $b_l = C_l \cos\phi_l$ که در این صورت:

$$C_l \sin(\omega_l t + \phi_l) = C_l \sin\phi_l \cos\omega_l t + C_l \cos\phi_l \sin\omega_l t$$
$$C_l \sin(\omega_l t + \phi_l) = a_l \cos\omega_l t + b_l \sin\omega_l t \tag{۷-۲}$$

و با جمع بستن تمام جملات سری و اضافه کردن a_0 نتیجه می‌شود که:

$$C_0 + \sum_{l=1}^{\infty} C_l \sin(\omega_l t + \phi_l) = a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos\omega_l t + b_l \sin\omega_l t = f(t) \tag{۸-۲}$$

بنابراین نمایشی دیگر از بسط سری فوریه برای تابع $f(t)$ به شکل زیر است:

$$f(t) = C_0 + \sum_{l=1}^{\infty} C_l \sin(\omega_l t + \phi_l) \tag{۹-۲}$$

که تنها کافی است برای آن مقادیر زیر برای دامنه و زاویه فاز در نظر گرفته شود:

$$\tan\phi_l = \frac{a_l}{b_l} \qquad \phi_l = \arctan\frac{a_l}{b_l}$$
$$C_0 = a_0 \qquad \mathrm{C_l}^2 = \mathrm{a_l}^2 + \mathrm{b_l}^2 \tag{۱۰-۲}$$

۲-۳- سری فوریه مختلط

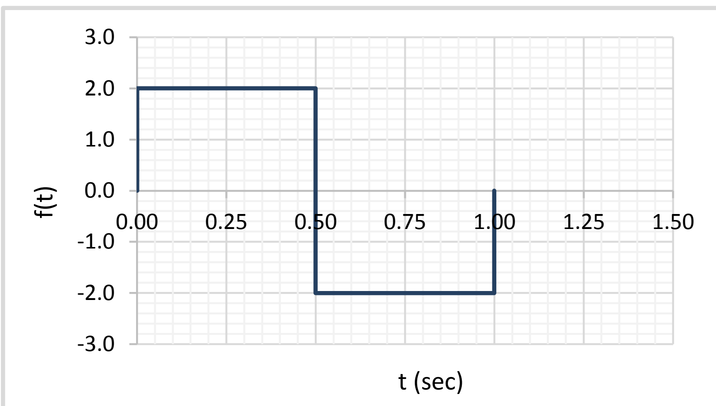
بسط فوریه هر تابع متناوب مانند $f(t)$ با پریود اصلی T به شکل زیر نوشته می‌گردد:

$$f(t) = F_0 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(F_l e^{i\omega_l t} + F_{-l} e^{-i\omega_l t}\right)$$
$$F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$
$$F_l = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_l t}dt \tag{۱۱-۲}$$
$$F_{-l} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{i\omega_l t}dt$$

نمایشی دیگر از سری فوریه مختلط برای یک تابع متناوب مانند $f(t)$ با پریود T به شکل زیر نوشته می‌گردد:

$$f(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l e^{i\omega_l t} \qquad F_l=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_l t}dt \tag{۱۲-۲}$$

مسئله ۲-۲. یک تابع متناوب با پریود اصلی T به شکل زیر در نظر بگیرید. مطلوب است بسط سری فوریه مختلط تابع و رسم طیف دامنه فوریه.



حل مسئله. با توجه به شکل تابع مشاهده می‌شود که پریود اصلی آن $T=1\ sec$ می‌باشد. بنابراین:

$$f(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l e^{i\omega_l t} \qquad F_l=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_l t}dt=\int_0^T f(t)e^{-i\omega_l t}dt$$

$$F_l=\int_0^T f(t)e^{-i\omega_l t}dt=\int_0^{0.5} 2e^{-i\omega_l t}dt+\int_{0.5}^{1.0} -2e^{-i\omega_l t}dt$$

$$F_l=\frac{2}{-i\omega_l}e^{-i\omega_l t}\Big|_0^{0.5}+\frac{-2}{-i\omega_l}e^{-i\omega_l t}\Big|_{0.5}^{1.0}$$

$$F_l=\frac{2}{-i\omega_l}\left[e^{-i\omega_l t}\Big|_0^{0.5}-e^{-i\omega_l t}\Big|_{0.5}^{1.0}\right]$$

$$F_l=\frac{2}{-i\omega_l}\left[\left(e^{-0.50i\omega_l}-1\right)-\left(e^{-i\omega_l}-e^{-0.50i\omega_l}\right)\right]$$

$$F_l=\frac{2}{-i\omega_l}\left[-1+2e^{-0.50i\omega_l}-e^{-i\omega_l})\right]$$

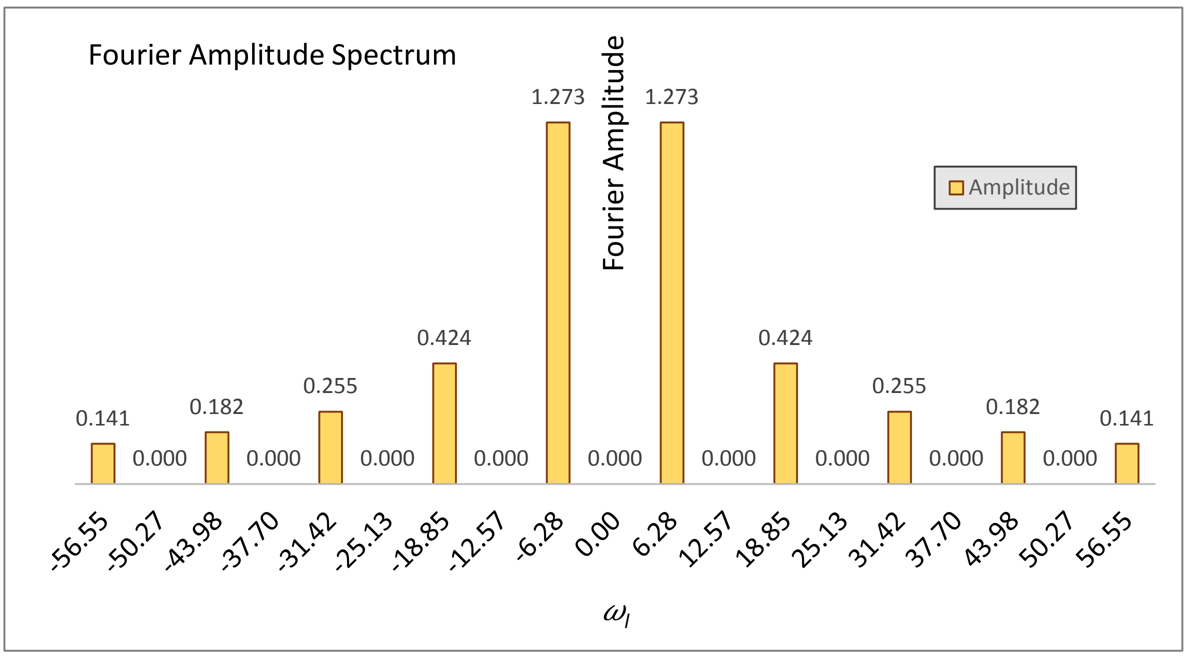
$$F_l = \frac{2}{-i\omega_l}[-1 + 2\cos 0.50\omega_l - 2i\sin 0.50\omega_l) - (\cos\omega_l - i\sin\omega_l)]$$

$$F_l = \frac{2}{-i2\pi l}[-1 + 2\cos\pi l - 2i\sin\pi l) - (\cos 2\pi l - i\sin 2\pi l)]$$

$$F_l = \frac{2}{-i2\pi l}[-1 + 2\cos\pi l - \cos 2\pi l]$$

$$F_l = \frac{i}{\pi l}[-1 + 2\cos\pi l - 1] = \frac{i}{\pi l}[-2 + 2\cos\pi l]$$

$$F_l = \begin{cases} \dfrac{-4i}{\pi l} & l = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & l = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$



۲-۴- تابع نامتناوب- انتگرال فوریه

هر تابع نامتناوب را می‌توان به صـورت یک تابع متناوب با پریود اصـلی T در نظر گرفت که البته مقدار T به سمت بی‌نهایت میل پیدا می‌کند. بدین ترتیب سری فوریه هارمونیک و یا مختلطی که برای تابع متناوب بسط داده شـــد، در مورد تابع نامتناوب تبدیل به انتگرال فوریه می‌گردد. به عنوان مثال در مورد انتگرال فوریه به

صورت هارمونیک می‌توان نوشت:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t \; dt \qquad (۲-۱۳)$$

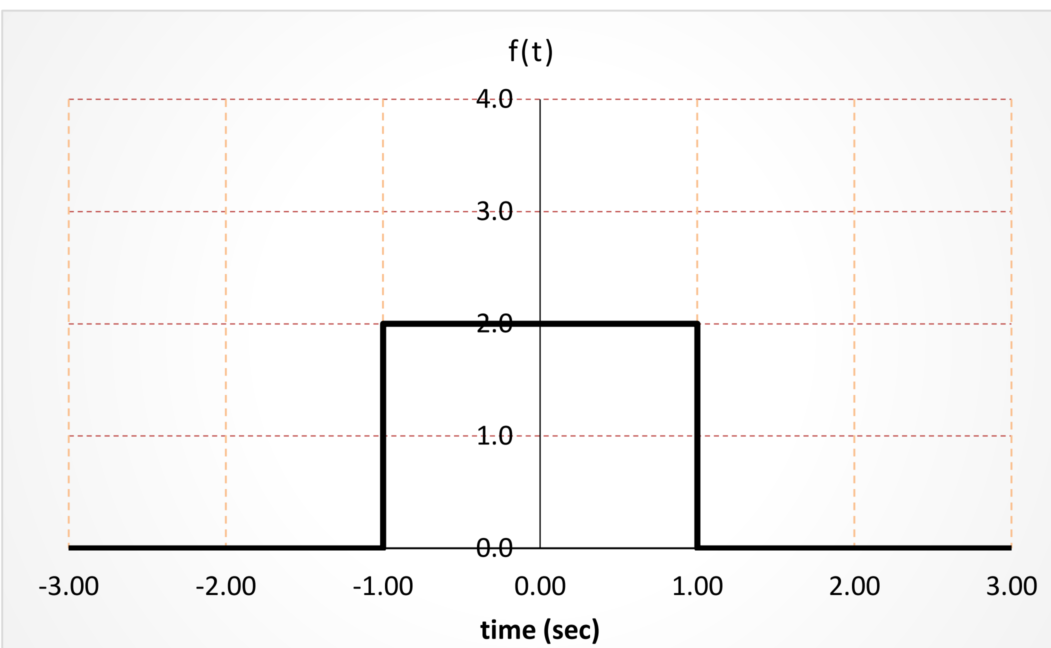
$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$$
$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt \qquad (۲-۱٤)$$

در شکل مختلط نیز انتگرال فوریه به شکل زیر نوشته می‌گردد:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$
$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \qquad (۲-۱۵)$$

دو انتگرال بالا انتقال تابع نامتناوب $f(t)$ به حوزه فرکانس و نیز بازگشـت آن به حوزه زمان را نشـان می‌دهند و در مجموع زوج تبدیل فوریه نامیده می‌شوند.

مسئله ۲-۳. تابع نامتناوب زیر را در نظر بگیرید. مطلوب است تبدیل فوریه آن به شکل مختلط و رسم طیف تبدیل فوریه.

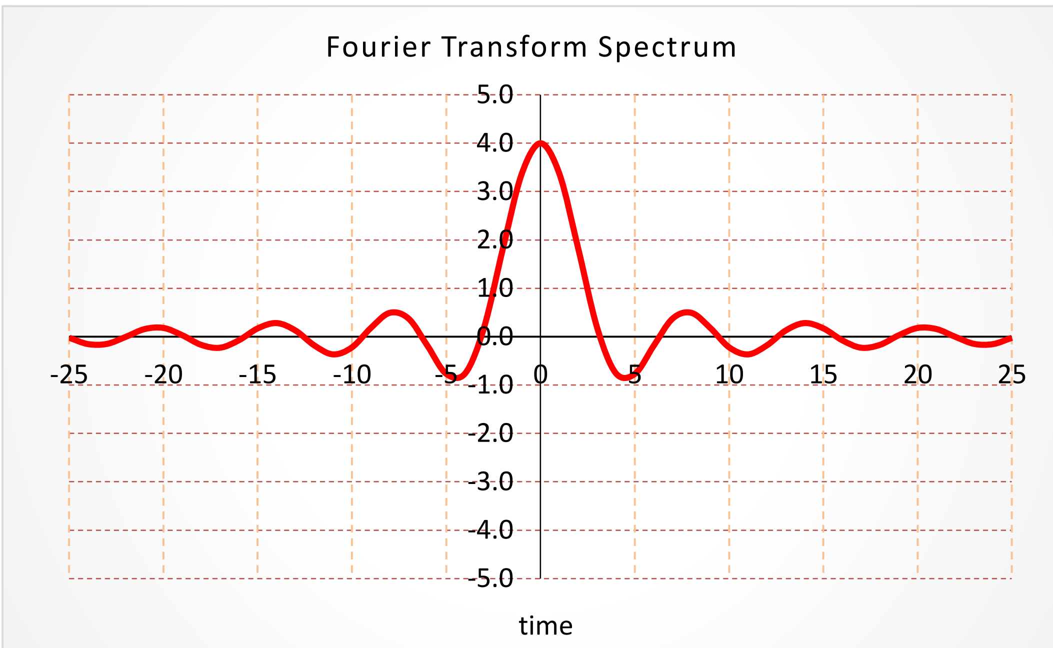


$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^{+1} 2\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^{+1} 2(\cos\omega t - i\sin\omega t) dt$$

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{2}{\omega}(\sin\omega t + i\cos\omega t)\Big|_{-1}^{+1}$$

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{2}{\omega}[\sin\omega - \sin(-\omega) + i\cos\omega t - i\cos(-\omega)] = 4\frac{\sin\omega}{\omega}$$



۲-۵- تبدیل فوریه گسسته

همان طور که پیش از این نیز گفته شـد، انتگرال فوریه تابع تحریک جانشـین بارگذاری نامتناوب می‌شـود که می‌توان آن را به صورت یک تابع متناوب با پریود بی‌نهایت در نظر گرفت. این انتگرال در واقع گسترشی است از سری فوریه هارمونیک که برای بسـط تابع بارگذاری با فرکانس‌های پیوسـته به کار می‌رود. با در نظر گرفتن بردار بارگذاری یعنی $R(t)$ به جای تابع $f(t)$ و همچنین $P(\omega)$ به جای $\mathcal{F}(\omega)$ در رابطه (۲-۱۵) می‌توان نوشت:

$$R(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega)\ \exp(i\omega t)\, d\omega$$
(۲-۱۶)
$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\ \exp(-i\omega t)\, dt$$

در رابطه فوق باید به این نکته توجه داشــت که $1/(2\pi)$ ضریب هم‌پایه‌سـازی اسـت که در رابطه $R(t)$ وارد شده است؛ درحالیکه که در بسیاری از مراجع، این ضریب در معادله دیگر نیز وارد شده است، به این معنا که ضریب مذکور در تعریف دامنه در واحد فرکانس ($P(\omega)/(2\pi)$) برای مولفه بارگذاری در فرکانس ω گنجانده شـده اسـت. در تعدادی از مراجع نیز، در زوج تبدیل فوریه علامت عبارت $i\omega t$ در تابع نمایی به صـورت قرینه آورده شده است.

اما در تحلیل عددی مسئله اندرکنش، لازم است که تابع بارگذاری به صورت متناوب با پریود اصلی مشخص و محدود باشـد. برای حداقل نمودن خطاها پریود تابع بارگذاری با در با اضـافه کردن بازه‌ای با مقدار بار صـفر گسترش داده می شود. این بازه ا ضافی در ا صلاح ناحیه آرام نامیده می‌گردد و اجازه می‌دهد تا مولفه هایی از پاسخ سیستم که ناشی از ارتعاش آزاد سیستم هستند، پیش از آغاز یک چرخه جدید از بارگذاری میرا شوند. در تبدیل فوریه گ سسته پریود ا صلی سی ستم یعنی T به n مقدار م ساوی تق سیم می شود که به منظور کارایی محاسـبات مقدار n به صـورت توانی از عدد (۲) انتخاب می‌گردد. بازه فرکانس نیز به همان تعداد نمو با مقدار ثابت $\Delta\omega$ تق سیم می‌گردد که در آن مقدار نمو فرکانس و نیز فرکانس ا صلی (کوچکترین فرکانس) برابر ا ست با $\Delta\omega = 2\pi/T$. بنابراین با فرض $t_j = j\ \Delta t = jT/n$ و $\omega_l = l\ \Delta\omega = l\ 2\pi/T$ نیز معادله (۲-۱۶) به صورت مجموعی از جملات گسسته با تعداد محدود به شکل زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$R(t_j) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{l=0}^{n-1} P(\omega_l)\exp\left(2\pi i\frac{lj}{n}\right) \qquad j = 0, 1, \dots, n-1$$
(۲-۱۷)
$$P(\omega_l) = \Delta t\ \sum_{j=0}^{n-1} R(t_j)\exp\left(-2\pi i\frac{lj}{n}\right) \qquad l = 0, 1, \dots, n-1$$

بدین ترتیب تابع نامتناوب بارگذاری در واقع با یک تابع متناوب مناســب جایگزین می‌شــود. این فرآیند برای انجام تحلیل عددی را می‌توان در مورد بارهای متناوب، مثلاً بارهای حا صل از ارتعاش ما شین‌آلات صنعتی، نیز به‌کار بســت. باید به این موضــوع نیز توجه داشــت که عبارت $\Delta\omega\ P(\omega_l)/(2\pi)$ در حقیقت دامنه فوریه را برای فرکانس ω_l نشان می‌دهد.

هنگامی که زوج تبدیل فوریه گسسته انجام می‌شود، تعداد زیادی از تکرار در توابع نمایی اتفاق می‌افتد که با بهره‌گیری از مزیت‌های آن در کنار اسـتفاده از جایگزینی باینری و نیز به کار بردن بلافاصـله‌ی نتایج یک گام

در گام بعدی، نتیجه‌ای بسیار کارا حاصل می‌گردد که در اصطلاح تبدیل سریع فوریه نامیده می‌شود.

شایان ذکر است که بالاترین فرکانس در بارگذاری مورد بحث یعنی ω_{max} برابر است با:

$$\omega_{max} = \frac{n}{2}\,\Delta\omega = \frac{\pi}{\Delta t} \tag{۱۸-۲}$$

۲-۶- تحلیل در حوزه فرکانس و روش پاسخ مختلط

با به‌کار بستن تبدیل فوریه گسسته برای بردار نیروهای خارجی یا بارگذاری که در نقاط گسسته تعریف شده و با $\{R(t_j)\}$ نمایش داده می‌شود، دامنه نیروها در حوزه فرکانس برای همه فرکانس‌های ω_l محاسبه شده که به آن بردار $\{P(\omega_l)\}$ گفته می‌شود. اکنون معادلات حرکت در حوزه فرکانس عبارتند از:

$$[S(\omega_l)]\{u(\omega_l)\} = \{P(\omega_l)\} \tag{۱۹-۲}$$

که در آن:

$$[S(\omega_l)] = [K] + i\omega_l[C] - {\omega_l}^2[M] \tag{۲۰-۲}$$

که در حالت کلی مشـــارکت خاک در ماتریس‌های $[K]$ و $[C]$ بســـتگی به فرکانس ω_l دارد. هم‌چنین میرائی هیسترزیس یا چرخه‌ای سازه با ا ستفاده از $[K^*]$ به جای $[K]$ قابل تعریف می‌با شد. با حل د ستگاه معادلات (۲-۱۹)، بردار $\{u(\omega_l)\}$ نتیجه می‌شـــود که در واقع این بردار دامنه‌های جابجایی را در حوزه فرکانس نشـــان می‌دهد. بنابراین با استفاده از تبدیل معکوس فوریه (به شکل گسسته) برای بردار جابجایی خواهیم داشت:

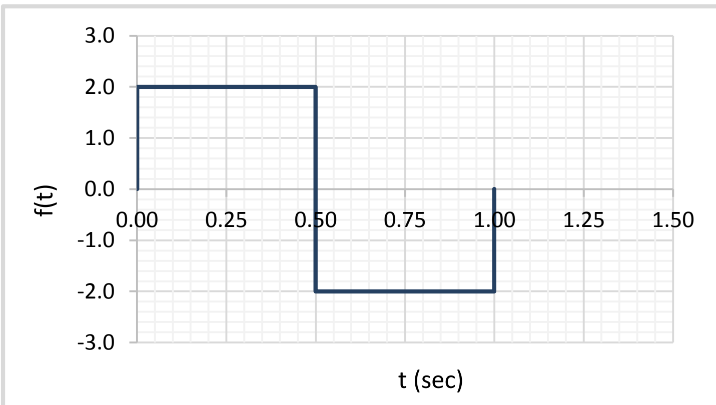
$$\{r(t_j)\} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{l=0}^{n-1} u(\omega_l)\exp\left(2\pi i\frac{lj}{n}\right) \tag{۲۱-۲}$$

که در نتیجه آن، جابجایی‌ها در حوزه زمان در نقاط گسسته حاصل می‌شوند.

البته باید به این موضـــوع نیز اشـــاره نمود که معادلات حرکت در حوزه فرکانس هیچ‌گاه به ازای تمام نقاط تبدیل فوریه حل نمی‌شوند. چراکه نمو فرکانس برای حل معادله (۲-۱۹) تا اندازه‌ای بزرگ در نظر گرفته می‌شود، که البته این بازه احتمالاً از همسایگی چند قله اول پاسخ در فرکانس‌های طبیعی سیستم کوچکتر است. مقادیر

بینابینی پاسخ نیز با استفاده از تکنیک درون‌یابی بدست آورده می شوند. به‌علاوه راه حل‌های تحلیلی موجود، برای سیستم‌های یک یا دو درجه آزادی قابل استفاده هستند.

مسئله ۲-۴. یک سیستم تک‌درجه‌آزادی با جرم m ، سختی $k = 1$ و فرکانس زاویه‌ای 12π در نظر بگیرید که تحت بار متناوب به شکل زیر قرار می‌گیرد. با صرف نظر از استهلاک انرژی پاسخ این سیستم را بدست آورید و سپس طیف دامنه پاسخ ترسیم نمائید.



حل مسئله. ابتدا از دینامیک سازه‌ها در حوزه زمان یادآوری می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش سیستم تک‌درجه‌آزادی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$m\ddot{r} + kr = R(t) \tag{۲-۲۲}$$

$R(t)$ تابع بارگذاری بر حسب زمان است که در اینجا همانند $f(t)$ در مسئله ۲-۱ فرض می شود. با توجه به حل مسئله ۲-۱ داریم:

$$R(t) = f(t) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi l}\sin 2\pi l t\right) \qquad l = 1,3,5,\dots$$
$$R(t) = f(t) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin 2\pi t + \frac{1}{3}\sin 6\pi t \frac{1}{5}\sin 8\pi t + \cdots\right) \tag{۲-۲۳}$$

از طرفی پاسخ سیستم تک‌درجه‌آزادی شامل حل عمومی یعنی $r_c(t)$ و حل خصوصی آن یعنی $r_p(t)$ است:

$$r(t) = r_c(t) + r_p(t) \tag{۲-۲٤}$$

که با صرف نظر از پاسخ عمومی به شکل زیر در می‌آید:

$$r(t) = r_p(t) \tag{۲-۲۵}$$

پاسخ خصوصی سیستم بستگی به تابع بارگذاری دارد. چنانچه $R(t)$ به صورت هارمونیک با دامنه R_0 و فرکانس زاویه‌ای ω فرض شود آنگاه در حوزه زمان پاسخ به شکل زیر بدست می‌آید:

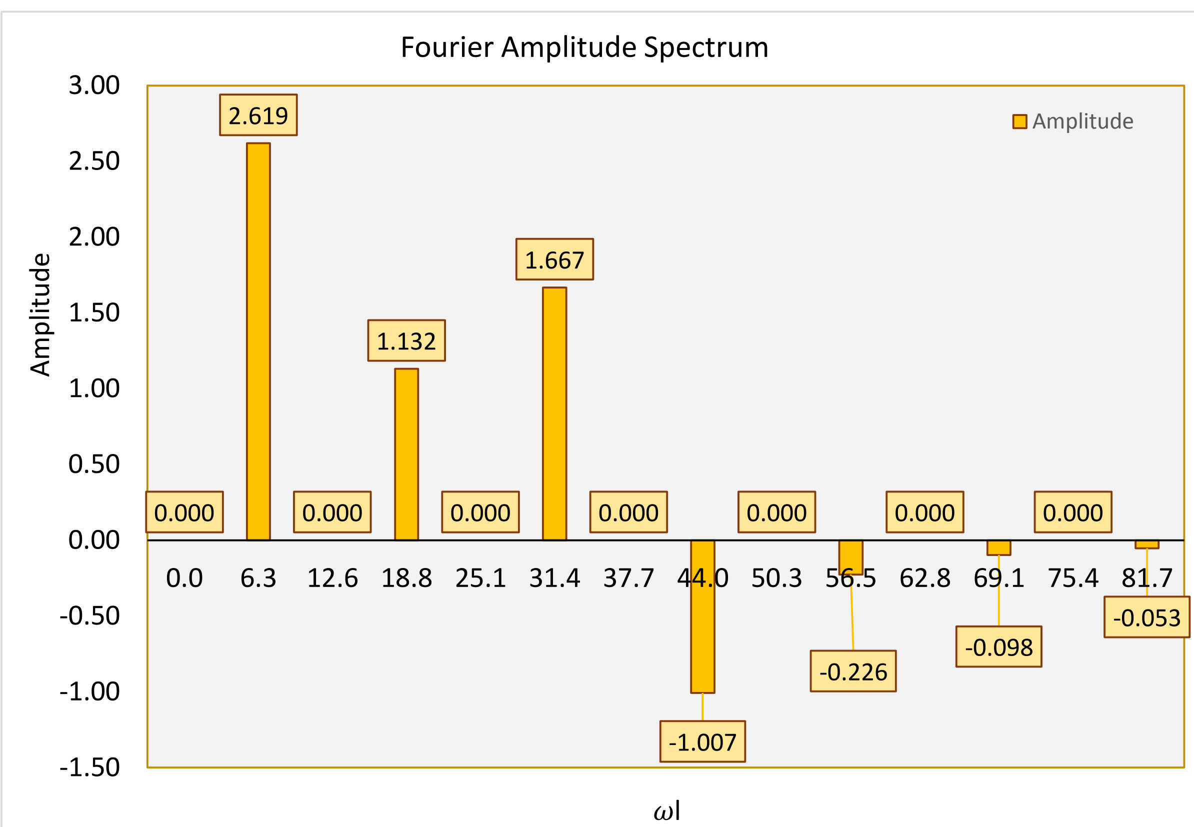
$$r(t) = r_p(t) = \frac{R_0}{k}\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\sin\omega t \tag{۲-۲۶}$$

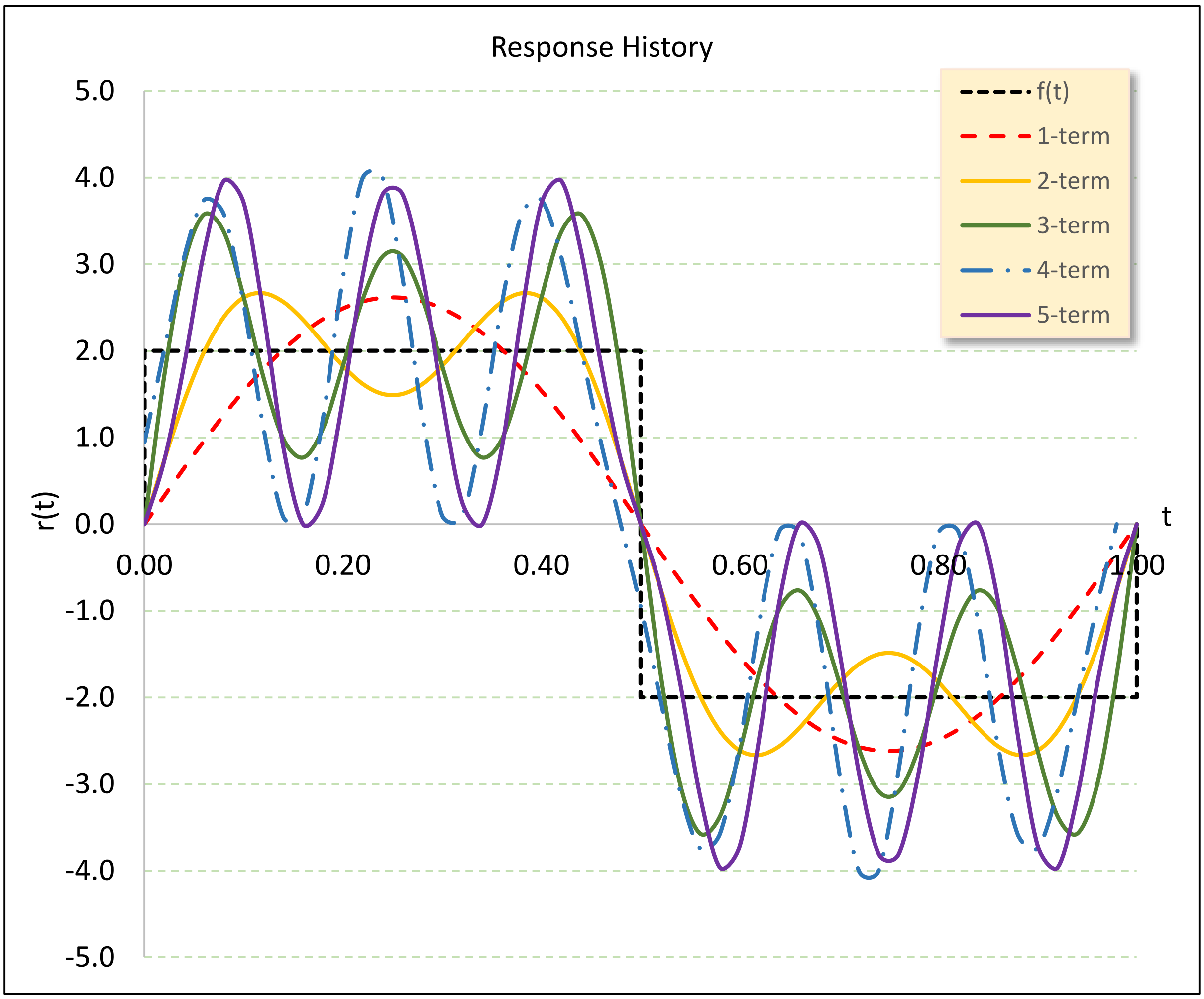
مشاهده می‌شود که برای l-امین جمله هارمونیک از بارگذاری $R_0 = 8/(\pi l)$ و $\omega = 2\pi l/T = 2\pi l$.
بنابراین:

$$\begin{aligned} r_l(t) &= \frac{R_0}{k}\frac{1}{1-(\omega_l/\omega_n)^2}\sin\omega_l t = \frac{8/(\pi l)}{1}\frac{1}{1-[2\pi l/(12\pi)]^2}\sin 2\pi l t \\ r_l(t) &= \frac{8}{\pi l}\frac{1}{1-(l/6)^2}\sin 2\pi l t = \frac{8}{\pi}\frac{1}{l(1-l^2/36)}\sin 2\pi l t \end{aligned} \tag{۲-۲۷}$$

اکنون با جمع بستن تمام جملات پاسخ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} r_l(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{l=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{l(1-l^2/36)}\sin 2\pi l t \\ r(t) &= \frac{8}{\pi l}\frac{1}{1-l^2/36}\sin 2\pi l t = \frac{8}{\pi}\frac{1}{l(1-l^2/36)}\sin 2\pi l t \end{aligned} \tag{۲-۲۸}$$





مسـئله ۲-۵. یک سـیسـتم تک‌درجه‌آزادی با جرم m ، سـختی k و میرائی c در نظر بگیرید که تحت بارگذاری $R(t)$ با پریود اصلی T قرار می‌گیرد. با استفاده از بسط فوریه مختلط، پاسخ این سیستم را به صورت جابجایی در حوزه فرکانس بدست آورید و مجدداً پاسخ را به حوزه زمان انتقال دهید.

حل مسئله. در گام اول، بسط فوریه تابع نیرو طبق رابطه (۲-۱۲) در نظر گرفته می‌شود:

$$f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l e^{i\omega_l t} \qquad F_l = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\omega_l t} dt$$

در مورد تابع نیرو رابطه (۲-۱۲) به شکل زیر بازنویسی نوشته می‌شود:

$$R(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\omega_l) \exp(i\omega_l t) \qquad P(\omega_l) = \frac{1}{T}\int_0^T R(t) \exp(-i\omega_l t)\, dt$$

در گام دوم معادله دینامیکی حاکم بر حرکت در حوزه زمان نوشته می‌شود.

$$m\ddot{r}(t) + c\dot{r}(t) + kr(t) = R(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\omega_l) \exp(i\omega_l t)$$

همانند مسئله ۲-۴، پاسخ معادله دیفرانسیل بالا شامل پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی است. پاسخ عمومی به دلیل استهلاک انرژی میرا می‌شود و به آن پاسخ گذرا نیز می‌گویند. در مقابل، پاسخ خصوصی مسئله تابع شرایط بارگذاری بوده و به عنوان پاسخ ماندگار نیز شناخته می‌شود. با در نظر گرفتن پاسخ خصوصی مطابق با تابع بارگذاری داریم:

$$r(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u(\omega_l) \exp(i\omega_l t)$$

که در آن u مقدار دامنه پاسخ مختلط و تابع فرکانس ω_l است. با مشتق گرفتن از $r(t)$ خواهیم داشت:

$$\dot{r}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i\omega_l u(\omega_l) \exp(i\omega_l t) = i\omega_l\, r(t)$$

$$\ddot{r}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} -{\omega_l}^2 u(\omega_l) \exp(i\omega_l t) = -{\omega_l}^2\, r(t)$$

و با جایگذاری در معادله دیفرانسیل حرکت نتیجه می‌شود که:

$$m[-{\omega_l}^2\, r(t)] + c\,[i\omega_l\, r(t)] + k[r(t)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\omega_l) \exp(i\omega_l t)$$

$$[k + i\omega_l c - m{\omega_l}^2\,]r(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\omega_l) \exp(i\omega_l t)$$

$$[k + i\omega_l c - m{\omega_l}^2\,] \sum_{l=-\infty}^{\infty} u(\omega_l) \exp(i\omega_l t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\omega_l) \exp(i\omega_l t)$$

$$[k + i\omega_l c - m{\omega_l}^2\,] u(\omega_l) = P(\omega_l)$$

$$r_0(\omega_l) = \frac{1}{[k + i\omega_l c - m{\omega_l}^2\,]} P(\omega_l)$$

بنابراین رابطه بالا نشان می‌دهد که چگونه می‌توان در حوزه فرکانس دامنه هر جمله از محا سبه نمود. باید به این موضوع دقت داشت که مقدار دامنه برای l-امین فرکانس تابع جرم، میرایی، سختی استاتیک، فرکانس ω_l و نیز دامنه نیرو در همین فرکانس است.

با قرار دادن $u(\omega_l)$ در رابطه $r(t)$ می‌توان دریافت که:

$$r(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u(\omega_l) \exp(i\omega_l t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{P(\omega_l)}{[k + i\omega_l c - m{\omega_l}^2\,]} \exp(i\omega_l t)$$

مفهوم سختی دینامیکی.

رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$[k + i\omega_l c - m{\omega_l}^2\,] u(\omega_l) = P(\omega_l)$$

این رابطه نشـان می‌دهد که حاصـل‌ضرب $[k + i\omega_l c - m{\omega_l}^2\,]$ در دامنه جابجایی دینامیکی یعنی $u(\omega_l)$ مقدار دامنه نیروی دینامیکی را بدست می‌دهد. بنابراین می‌توان سختی دینامیکی یعنی $S(\omega_l)$ را به شکل زیر تعریف نمود:

$$S(\omega_l)\, u(\omega_l) = P(\omega_l)$$

بنابراین نتیجه می‌شود که سختی دینامیکی تابعی از جرم، میرایی، سختی استاتیک و فرکانس ω_l است.

مفهوم تابع انتقال.

رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$u(\omega_l) = \frac{1}{[k + i\omega_l c - m{\omega_l}^2\,]} P(\omega_l)$$

$$u(\omega_l) = H(\omega_l) P(\omega_l); \qquad H(\omega_l) = \frac{1}{[k + i\omega_l c - m{\omega_l}^2\,]}$$

در حوزه فرکانس، تابع $H(\omega_l)$ با ضرب شـــدن در دامنه نیرو به طور مســـتقیم مقدار دامنه جابجایی را نشـــان می‌دهد و از این جهت به آن تابع انتقال گفته می‌شـــود. از نظر مفهوم تابع انتقال عکس ســـختی دینامیکی را نشان می‌دهد و از این رو می‌توان به آن انعطاف‌پذیری (نرمی) دینامیکی نیز گفت.